**Общая характеристика последовательных методов обнаружения разладки**

Общепринятая математическая постановка задачи обнаружения в реальном времени разладки дискретного стохастического процесса (временного ряда) *X*(*t*) может быть описана следующим образом.

Пусть наблюдается последовательность *x*(*t*1) = *x*1, *x*(*t*2) = *x*2 , ... Предполагается, что контролируемый объект может находиться в двух состояниях: «норма» (основное рабочее состояние), которому соответствует определенные вероятностные характеристики процесса *X*(*t*) , и «разладка», когда вероятностные свойства *X*(*t*) отличаются от имевших место в состоянии «норма». Переход из состояния «норма» в состояние «разладка» происходит в некоторый заранее непрогнозируемый момент времени *t*0 . Требуется по последовательно поступающим значениям *x*1, *x*2,….найти (обнаружить) *t*0 , причем желательно с минимальным запаздыванием .

Ясно, что для оперативного обнаружения разладки необходимо использовать методы и алгоритмы, относящиеся к категории последовательных, пригодных для работы в реальном времени, в ритме с поступлением значений *xi* .

Все последовательные методы обнаружения основаны на вычислении по наблюдаемым дискретным значениям *xi* (*i = 1,2,...,n…*) в темпе с их поступлением значений решающий функции *gi* = *gi* (*xi* , *xi-1* , *xi-2*,…). Эта функция вычисляются рекуррентно, исходя из значений статистики на предыдущем шаге и очередного измеренного значения *xi*. Вычисленное значение  затем сопоставляется с определённым пороговым уровнем *H*, разделяющим область возможных значений статистики на две подобласти: и , где - подобласть продолжения наблюдений, - критическая подобласть.

Если – то процесс контроля продолжается, т.е. считается, что разладка отсутствует; если же, но , то подаётся сигнал о наличии разладки (сигнал тревоги). Контролирующая процедура при этом по желанию экспериментатора может запускаться заново.

В силу стохастичности контролируемого процесса сигнал тревоги может появиться и тогда, когда на самом деле разладка отсутствует. Это ситуация, так называемой, ложной тревоги. Желательно, чтобы временные интервалы между появлением ложных сигналов тревоги  были бы максимально большими с тем, чтобы подобная ситуация возникала бы по возможности редко.

Исторически первый алгоритм, который в принципе может быть отнесен к алгоритмам обнаружения разладки, был предложен в 1924 году Шухартом [1] как инструмент анализа изменчивости (степени вариабельности) любых процессов. C тех пор интерес к данной тематике только усиливается, о чем свидетельствуют данные различного рода обзоров (см., например [2-5]), появление большого числа монографий, обобщающих результаты проведенных исследований [6,7], а также недавние данные библиометрического анализа [8], зафиксировавшего экспоненциальный рост числа публикаций за последние годы. Это, по всей видимости, связано с появлением всё новых прикладных задач, где такого рода алгоритмы могут успешно использоваться – в частности, при создании мониторинговых систем в промышленности, экологии, медицине и др.

К настоящему времени разработано очень большое число различных методов обнаружения разладки. Все их можно подразделить на отдельные группы, используя те или иные классификационные признаки. При этом важно подчеркнуть, что далее будут указываться только такие признаки, которые принято учитывать при разработке и исследовании конкретных алгоритмов обнаружения разладки.

В качестве первичных (частных) будем использовать такие признаки как:

1. особенности наблюдаемого (контролируемого) случайного процесса *X*(*t*);
2. вид модели разладки;
3. разновидность алгоритма обнаружения разладки, т.е по сути разновидность используемой решающей функции *gi* .

В числе особенностей процесса *X*(*t*) , которые обычно учитываются при построении и использовании контролирующих алгоритмов, выделяют:

- размерность процесса (одномерный или многомерный);

- взаимозависимость значений *xi* : некоррелированные значения, т.е. *X*(*t*) – процесс типа дискретного белого шума (наиболее распространенный вариант), *X*(*t*) – процесс типа авторегрессии – скользящего среднего [9], марковская последовательность с конечным числом состояний) [10];

- стационарность процесса *X*(*t*) в состоянии «норма».

По виду модели разладки исследованы следующие варианты:

- скачкообразное изменение некоторого контролируемого параметра *θ* от значения *θ*0 до разладки к значению *θ*1 после разладки; принято величину разладки  количественно определять как разность значений *θ*1 и *θ*0 в выбранной подходящей метрике:  При этом на практике используется понятие номинальной (ожидаемой или разладки, которую нужно максимально быстро обнаружить)  в отличие от фактической ;

- скачкообразное изменение вектора контролируемых параметров  ;

- линейное или квадратичное изменение показателя *θ* на интервале времени (*t*0 , *t*1 ) или (*t*0 , +∞ );

- экспоненциальное изменение *θ* .

Классификация по разновидности (типу) алгоритма (метода) обнаружения разладки является во многом ключевой. В настоящее время принято выделять четыре основные разновидности алгоритмов с большим количеством их модификаций [11]:

- классический алгоритм Шухарта (карта Шухарта) [5];

- алгоритм скользящего среднего - Moving Average или МА- алгоритм [11];

- алгоритм экспоненциального сглаживания или EWMA-алгоритм [12];

- алгоритм кумулятивных сумм (АКС или CUSUM-алгоритм), предложенный в 1954 году Е.С. Пейджем [13].

Считается, что именно с этой публикации резко возрос интерес исследователей к данной тематике, что привело к последующему стремительному увеличению числа публикаций.

Далее решающие функции *gi* для всех указанных разновидностей алгоритмов обнаружения разладки будут записаны применительно к случаю некоррелированных значений *xi* .

Решающая функция алгоритма Шухарта формируется на некотором такте *i* следующим образом:

  (1.1)

или иначе:  , где  .

Фактически в данном алгоритме осуществляется предварительное группирование данных с последующим вычислением средних значений в каждой группе. На практике обновление значений *gi* производится на каждом такте, кратном *N*, когда самое раннее значение суммы  удаляется и заменяется на новое. Такую процедуру трудно назвать последовательной. В принципе карты Шухарта и предназначались не для решения задачи обнаружения разладки, а, что уже отмечалось многими исследователями, для выявления степени стабильности (или нестабильности) наблюдаемого процесса [5].

Решающая функция МА- алгоритма имеет очевидный вид

 ; *i* ≥ *N* (1.2)

МА-алгоритм как средство обнаружения разладки, к сожалению, сравнительно слабо исследован и редко используется на практике, что, скорее всего, объясняется тем, что его считают некоторым частным случаем алгоритма Шухерта. Однако это не совсем так, что, в частности, проявляется при выборе решающей границы *Н*. В главе 4 диссертации именно МА-алгоритм будет использован для построения контролирующих процедур.

EWMA-алгоритм основан на стандартной формуле экспоненциального сглаживания [14], когда очередное значение решающей функции определяется по формуле:

 (1.3),

где α – параметр сглаживания.

При этом следует учесть, что при первоначальном запуске алгоритма будет иметь место переходной процесс длительностью порядка 3/α.

Алгоритм кумулятивных сумм. В общем виде решающую функцию  используемую в АКС для случая независимых наблюдений, можно записать следующим образом [13]:

  (1.4)

где – приращение решающей функции, подобное имеющему место в стандартном последовательном критерии отношения вероятностей Вальда [15]:

. (1.5)

Здесь ,  - функции плотности распределения вероятностей процесса *X*(*t*) до и при наличии разладки соответственно.

Как следует из соотношения (1.4), решающая функция не может принимать отрицательные значения, что во многих случаях обеспечивает бóльшее быстродействие АКС по сравнению с другими алгоритмами [16, 17] и его широкое использование при решении различных прикладных задач. В этой связи можно упомянуть о том, что, кроме классического, были разработаны и его версии, в числе которых:

- ускоренный алгоритм [18], когда при первоначальном запуске контролирующей процедуры начальное значение  отлично от нуля: ;

- алгоритм с изменяющимися (сходящимися) границами [19], иногда именуемый модифицированным АКС.

Известны и иные разновидности АКС, приспособленные, в частности, к работе в условиях коррелированности наблюдений [20-21] или использующие видоизмененную решающую функцию [22,23]. Однако на практике наибольшим спросом пользуются все-таки классические варианты АКС, когда контролируемый процесс относится к категории гауссовского белого шума, а разладка состоит в скачкообразном изменении значений математического ожидания или дисперсии процесса. Именно эти хорошо изученные варианты зачастую используются в качестве образцов при сопоставлении с новыми алгоритмами обнаружения разладки.